Dossier n°1 : Exemples simples de problèmes de dénombrement dans différentes situations.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 30 juillet 2003.
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

Les élèves commencent l'étude des probabilités dès la classe de Première S avec la notion de loi de probabilité sur un ensemble fini.

Cette étude se poursuit en Terminale S avec des exemples de lois discrètes et l'introduction des combinaisons. Le dénombrement ne se fait alors qu'à travers l'utilisation d'arbres, de diagrammes, ou de combinaisons.

Toutefois, dans l'ancien programme de Terminale S, le dénombrement, associé à la combinatoire, fait l'objet d'un chapitre du cours.

Je choisis donc de situer ce dossier au niveau de la Terminale S ancien programme.

II Commentaires généraux.

L'objectif de ce dossier est d'appliquer, à travers des exemples issus de situations concrètes, les grands principes de dénombrement et les outils de calcul associés acquis en Terminale S.

Je me permets tout d'abord de vous rappeler les deux principes de dénombrement de base : celui de la somme et celui du produit.

Principe de la somme :

Soit E un ensemble de cardinal fini. Si A_1, A_2, …, A_p ($p \geq 1$) constituent une partition de E, alors :

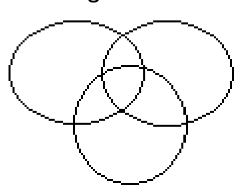
$$\text{Card}(E) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \ldots + \text{card}(A_p).$$

Principe du produit ou principe multiplicatif :

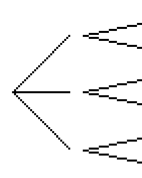
Lorsqu'une situation comporte p étapes offrant respectivement n_1, n_2, …, n_p possibilités (où chaque n_i ne dépend que de l'étape i), le nombre total d'issues est $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$.

De ces deux principes, on peut dégager deux outils de représentation de situations de dénombrement :

Les diagrammes



Les arbres



Le dénombrement étant en général rattaché à des notions ensemblistes, on introduit les notions suivantes :

Définitions :

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $p \geq$.

On appelle <u>liste de p éléments de E</u> toute suite ordonnée de p éléments de A non nécessairement distincts.
On appelle <u>arrangement de p éléments de E</u> toute liste de p éléments de E deux à deux distincts.
On appelle <u>permutation de E</u> toute liste de n éléments deux à deux distincts.
Si p est compris entre et n, on appelle <u>combinaison de p éléments de E</u> toute partie de A ayant p éléments.

J'ai donc choisi de vous présenter quatre exercices pour illustrer ce dossier :

- l'exercice n°1 qui utilise les diagrammes ;
- l'exercice n°2 qui utilise les combinaisons et les permutations ;
- l'exercice n°3 qui utilise les arrangements et les combinaisons ;
- l'exercice n°4, de synthèses, en géométrie.

Dans les exemples de dénombrement proposés, nous aurons donc besoin de dénombrer les structures précédemment définies :

<u>Théorème :</u>
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit p un entier naturel.
Le nombre de listes de p éléments de E est n^p.
Si p est un entier compris entre 0 et n :

- **le nombre d'arrangements de p éléments de A est noté A_n^p et vaut n(n-1)(n-2)…(n-p+1) ;**
- **le nombre de permutations de E est noté n ! et vaut A_n^n = n(n-1)…2 × 1 ;**
- **le nombre de combinaisons de p éléments de E est noté $\binom{n}{p}$ et vaut $\frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.**

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1

<u>But :</u> Dénombrer les élèves d'une classe en fonction de la langue pratiquée.

<u>Méthode :</u> C'est un exemple très simple de dénombrement permettant de mettre en œuvre l'outil « diagramme ».

<u>Outils :</u>
Principe de la somme

III.2 Exercice n°2

<u>But :</u> Dénombrer les anagrammes de trois mots.

<u>Méthode :</u> Distinguer les lettres présentes plusieurs fois dans un mot des autres lettres.

<u>Outils :</u>

- Nombre de combinaisons ;
- Nombre de permutations ;
- Principe multiplicatif.

III.3 Exercice n°3.

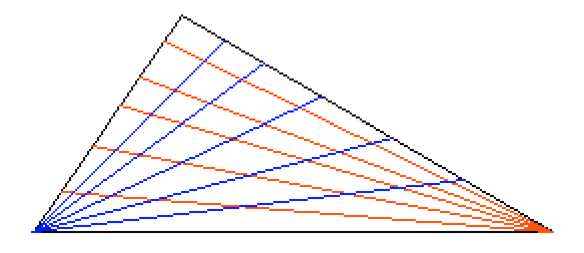
<u>But :</u> Dénombrer les codes d'un système d'alarme satisfaisant à des conditions données.

<u>Outils :</u>

- Nombre de combinaisons ;
- Nombre d'arrangements ;
- Principe multiplicatif.

III.4 Exercice n°4.

<u>But</u> : Dénombrer les triangles non aplatis dont les côtés sont tracés sur la figure.



Cet exercice n'étant pas guidé, il s'agit d'un vrai problème de dénombrement demandant une organisation de la part de l'élèves pour trier les objets et pour les compter.

<u>Méthode :</u>

Il suffit tout d'abord de remarquer que toute droite tracée sur la figure, passer soit par A, soit par B, et qu'une seule d'entre elles passe par A <u>et</u> par B.

Par suite, tout point dessiné sur la figure distinct de A et B est intersection d'exactement deux droites.

On peut donc classer les triangles selon trois catégories :

- ceux dont un côtés est [AB] ;
- ceux dont A est un sommet mais pas B ;
- ceux dont un sommet est B mais pas A ;

On obtient ainsi une partition de l'ensemble à dénombrer.

Il suffit ensuite, pour les triangles de chaque catégorie, de déterminer les autres côtés et donc de les dénombrer.

<u>Outils :</u>

- principe de la somme ;
- principe multiplicatif ;
- nombre de combinaisons.

IV Enoncés et références des exercices.

IV.1 Exercice n°1.

Chacun des élèves d'une classe pratique au moins une des trois langues vivantes suivantes : allemand, anglais ou espagnol. On sait de plus que :

- deux d'entre eux pratiquent les trois langues ;
- quinze suivent les cours d'allemand et d'anglais ;
- sept suivent les cours d'allemand et d'espagnol ;
- dix suivent les cours d'anglais et d'espagnol ;
- vingt-deux suivent les cours d'allemand ;
- vingt-six suivent les cours d'anglais ;
- seize suivent les cours d'espagnol.

Combien d'élèves pratiquent l'anglais et l'allemand sans l'espagnol ? Combien d'élèves pratiquent l'anglais et l'espagnol sans l'allemand ? Combien d'élèves étudient seulement l'allemand ? l'espagnol ? Combien y-a-t-il d'élèves dans la classe ?

IV.2 Exercice n°2 (n°16 p 213, Fractale T^{ale} S 1998).

Déterminer le nombre d'arrangements de chacun des mots suivants : CONCLUSION, CONTRADICTION, BACCALAUREAT.

IV.3 Exercice n°3 (n°2 p 210, Fractale T^{ale} S 1998).

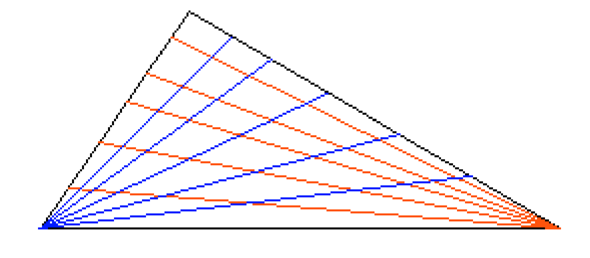
On se propose de tester l'efficacité d'une serrure à code et d'un système d'alarme.

Une porte est munie d'un dispositif portant les touches 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et A, B, C, D. La porte s'ouvre lorsqu'on frappe dans l'ordre trois chiffres et deux lettres qui forment un code. Les chiffres sont nécessairement distincts, les lettres non.

1. Quel est le nombre de codes possibles ?
2. Déterminer le nombre de codes répondant à chacun des critères suivants :
   a) les trois chiffres sont pairs ;
   b) les deux lettres sont identiques ;
   c) le code contient deux chiffres impairs.
3. La porte est équipée d'un système d'alarme se déclenchant lorsque aucun des trois chiffres frappés ne figure sur la liste des chiffres du code. Déterminer le nombre de codes déclenchant l'alarme.

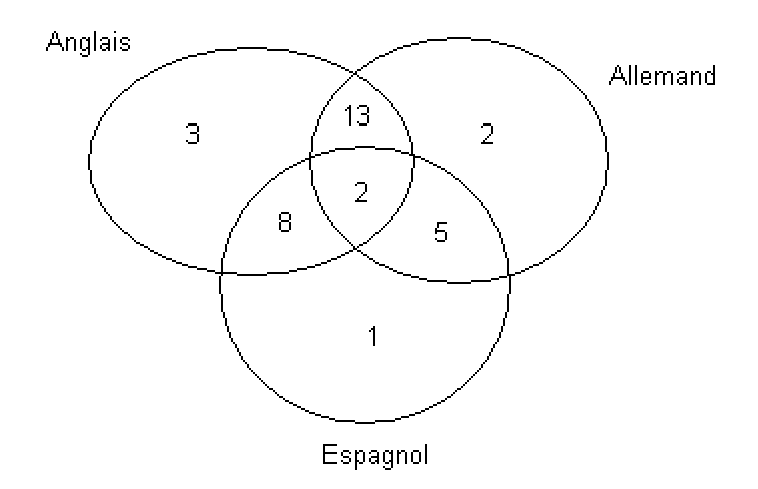
IV.4 Exercice n°4 (n°63 p 280, Terracher T^{ale}S 1998).

Combien de triangles non aplatis dont les côtés sont tracés sur la figure ci-dessous peut-on compter ?



V Correction des exercices.

V.1 Exercice n°1.



13 élèves pratiquent l'anglais et l'allemand sans l'espagnol.
8 élèves pratiquent l'anglais et l'espagnol sans l'allemand.
2 élèves étudient seulement l'allemand.
1 élève étudie seulement l'espagnol.
Il y a 34 élèves dans cette classe.

V.2 Exercice n°2.

Former un anagramme consiste à disposer les n lettres du mot dans n cases.

- *Anagrammes de CONCLUSION.*

Il y a deux C, deux O et deux N indiscernables entre eux. Il y a 10 lettres dans le mot « conclusion ».

On en déduit que :

- Il y a $\binom{10}{2}$ façons de choisir les cases où on place les deux lettres C.
- Il y a $\binom{8}{2}$ façons de choisir les cases où on place les deux lettres O.
- Il y a $\binom{6}{2}$ façons de choisir les cases où on place les deux lettres N.
- Il y a 4 ! façons de disposer les lettres suivantes.

D'où, le nombre d'anagrammes est, par le principe multiplicatif :

$$\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}4\,! = \frac{10!}{2!8!}\times\frac{8!}{2!6!}\times\frac{6!}{2!4!}4! = \frac{10!}{2!2!2!}$$

- *Anagrammes de CONTRADICTION* :

Par le même raisonnement, le nombre d'anagrammes est :

$$\binom{13}{2}\binom{11}{2}\binom{9}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{2}3! = \frac{13!}{2!11!}\frac{11!}{2!9!}\frac{9!}{2!7!}\frac{7!}{2!5!}\frac{5!}{2!3!}3! = \frac{13!}{(2!)^5}$$

- *Anagrammes de BACCALUREAT :*

$$\binom{12}{4}\binom{8}{2}6! = \frac{12!}{4!8!}\frac{8!}{2!6!}6! = \frac{12!}{4!2!}.$$

V.3 Exercice n°3

1. Un code est donc formé d'un arrangement de trois chiffres de l'ensemble {1,2,…, 9} et d'une liste de deux éléments de {A, B, C, D}.

   On déduit du principe multiplicatif que **le nombre de codes possibles est** $A_9^3 \times 4^2$ **= 8064.**

2. a) Il y a quatre chiffres pairs : 2, 4, 6 et 8.

   Un code dont les trois chiffres sont pairs est donc formé d'un arrangement de trois chiffres de l'ensemble {2, 4, 6, 8} et d'une liste de deux éléments de {A, B, C, D}.

   On déduit du principe multiplicatif que **le nombre de codes possibles est** $A_4^3 \times 4^2$ **= 384.**

   b) Les deux lettres sont identiques donc il n'y que 4 choix possibles pour les lettres. Les chiffres constituent toujours un arrangement de trois chiffres de l'ensemble {1, 2, …, 9}.

   D'où, d'après le principe multiplicatif, le nombre de codes possibles est $A_9^3 \times 4$ **= 2016.**

   c) Il y a cinq chiffres impairs : 1, 3, 5, 7, 9. Les codes cherchés contenant deux chiffres impairs, il y a A_5^2 choix possibles.

   On doit ensuite placer ces deux chiffres dans trois cases, il y a donc $\binom{3}{2}$ choix possibles.

   Il reste à choisir le dernier chiffre qui sera pair : il y a donc 4 choix possibles.

   Enfin, les lettres constituent une liste de deux éléments de {A,B,C,D} donc il y a 4² choix possibles.

   D'où, d'après le principe multiplicatif, **le nombre de codes possibles est** $A_5^2 \times \binom{3}{2} \times 4^2$ **= 3840.**

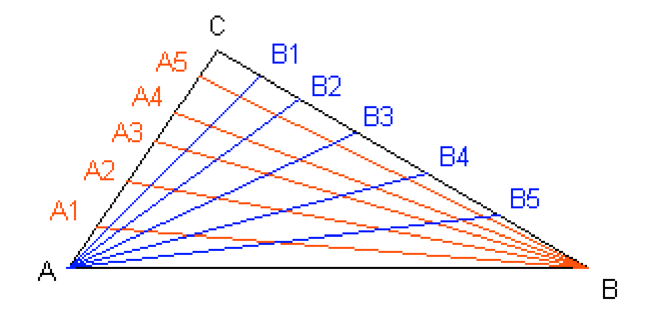
3. L'alarme se déclenche lorsqu'on frappe trois chiffres par mi les six n'appartenant pas au code et une liste de deux éléments de {A, B, C, D} quelconque.

   On déduit du principe multiplicatif que **le nombre de codes déclenchant l'alarme est** $A_6^3 \times 4^2$ **= 1920.**

V.4 Exercice n°4.

On remarque que toute droite tracée sur la figure passe soit par A, soit par B (éventuellement les deux). On peut alors répartir les triangles en trois catégories :

- ceux dont un côté est [AB] ;
- ceux dont un sommet est A mais n'ayant pas B pour sommet ;
- ceux dont un sommet est B mais n'ayant pas A pour sommet.



Triangles dont un côté est [AB] :

Il y a six triangles dont le troisième sommet est $[AB_1]$, 6 dont le troisième sommet est sur $[AB_2]$, …, jusqu'à [AC] ie 6 × 6 triangles.

Triangles dont un sommet est A mais pas B :

Les côtés du triangle issus de A sont à choisir parmi [AB_1), [AB_2), …, [AB_5), [AC), c'est à dire deux à choisir parmi 6. Il y a donc $\binom{6}{2}$ choix possibles.

Le troisième côté est une des droites (BA_1), (BA_2), …, (BC) : il y a six choix possibles.

D'où, on dénombre $6\binom{6}{2}$ triangles dont A est sommet mais pas B.

Triangles dont B est un sommet mais pas A

De même, on en dénombre $6\binom{6}{2}$.

On déduit donc du principe de la somme qu'**il y a** $6\left(6+2\binom{6}{2}\right)$=6(6+30) = 6 $\times$ 36 = **216 triangles dont les côtés sont tracés sur la figure.**